Totaal geflipt!

Top, Jakob; Top, Jordi

Published in:
Pythagoras

Publication date:
2008

***FlipIt* en *Fiver* zijn twee namen voor hetzelfde spelletje. Het is beschikbaar voor allerlei mobiele telefoons en je kunt het downloaden op je computer of spelen op het internet. Over het spel kun je vanuit wiskundig oogpunt interessante vragen stellen.**

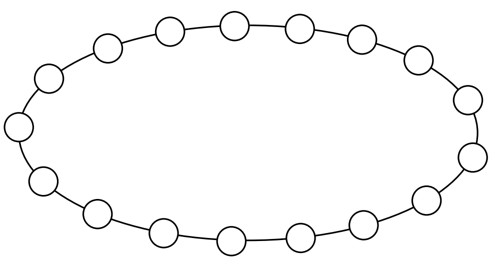
■ door Jaap en Jordi Top

TOTAAL GEFLIPT!

Fiver kun je spelen op bijvoorbeeld www.mazeworks.com/fiver/index.htm. Hierbij speel je op een $n \times n$ bord, waarbij je n zelf mag kiezen tussen 3 en 8. *FlipIt* kun je op www.novelgames.com/flashgames/game.php?id=7 (of ook via www.math.rug.nl/~top) spelen op een $n \times m$ bord, waarbij je n en m kiest tussen 2 en 10.

Het spelbord bestaat uit een aantal schijven, die aan het begin van het spel allemaal wit zijn. Het is de bedoeling alle schijven zwart te maken. Dat doe je door sommige schijven aan te wijzen. Wijs je een schijf aan, dan verandert deze, en ook al z'n buren, van kleur (dus wit wordt zwart en zwart wordt wit). De naam 'flipit' slaat op dit omflippen van de kleur. De naam 'fiver' slaat op het rechthoekige bord waarop je het speelt: wijs je een schijf aan die niet aan de rand van het bord ligt, dan flip je precies 5 schijven van kleur (de schijf zelf, z'n linker- en rechterbuur, en z'n beneden- en bovenbuur). Thuis spelen we dit spel ook wel met rijen speelkaarten, die dan omgedraaid moeten worden.

Je zou het spel ook op heel andere netwerken van allemaal schijven kunnen spelen, waarin je zelf bepaalt welke schijven elkaars buren zijn en welke niet. Bijvoorbeeld een kring van schijven:



In dit geval lukt het om alle schijven van kleur te flippen. Immers, wijs ze gewoon allemaal aan. Elke schijf heeft precies twee buren, dus hij verandert in totaal drie keer van kleur (namelijk, als hij zelf aangewezen wordt, en als de ene buur wordt aangewezen, en als de andere aan de beurt is). Elke witte schijf wordt zo eerst zwart, dan weer wit, en ten slotte zwart.

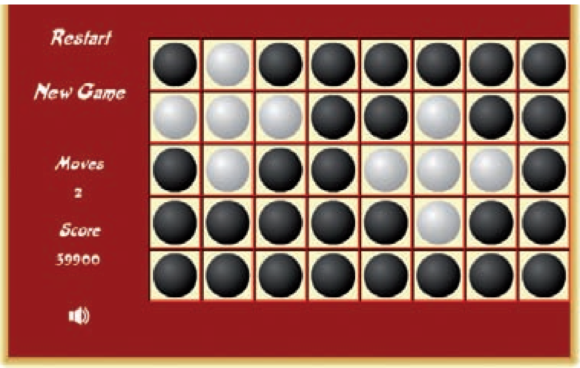
Nog een voorbeeld: een rij (witte) schijven:

Wijzen we de tweede schijf in de rij aan, dan worden de eerste drie zwart. Vervolgens ook de vijfde, dan zijn al de eerste zes zwart. Is het totaal aantal schijven een veelvoud van 3, dan kun je door zo door te gaan ervoor zorgen dat ze allemaal zwart worden. Dat lukt ook voor rijen van een andere lengte: voor $3n + 2$ schijven wijs je eerst de meest linkse aan, en dan blijft een rij bestaande uit precies $3n$ witte schijven over; hiervoor weten we al hoe we alles zwart kunnen maken. En voor een rij bestaande uit $3n + 1$ schijven wijzen we zowel de meest linkse als de meest rechtse aan. Hierna blijft middenin een rij bestaande uit $3(n - 1)$ schijven over, en die konden we al flippen.

Je gaat je na dit succes afvragen of je ieder netwerk van schijven geheel kan flippen. Het antwoord is: JA! Dat is gemakkelijk gezegd, maar een bewijs ervoor vergt nog best wat lastige wiskunde. Afgelopen jaar was dit een van de opgaven in de LIMO, de jaarlijkse wedstrijd waarin teams van wiskundestudenten van Nederlandse universiteiten hun tanden in een aantal problemen zetten. Niemand van hen had de opgave over FlipIt/Fiver helemaal goed, al zaten een paar teams behoorlijk op de goede weg.

Het idee is het volgende. Nummer de schijven 1, 2, 3,... Als je tijdens het spel de schijven 2, 5, 6 zou willen aanwijzen, dan noteer je dit als (0, 1, 0, 0, 1, 1,...). Dus als een rij nullen en enen, met op de n-de plek een nul als de n-de schijf niet wordt aangewezen, en een één als je die schijf wel aanwijst. Het effect van zo'n rij aan te wijzen punten is dat sommige schijven zwart worden en andere misschien wit blijven. Ook dat noteer je als een rij nullen en enen zoals (0, 0, 0, 1, 1, 0, ...) (dit voorbeeld betekent: vierde en vijfde schijf worden zwart, eerste en tweede en derde en zesde blijven wit).

Als we met V de verzameling van alle (onein-

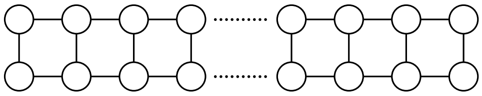


dige) rijtjes nullen en enen noteren, kun je het hele spel zien als een voorschrift

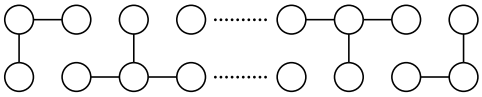
$$F : V \to V.$$

De kunst is dan te laten zien dat het rijtje (1, 1, 1, 1, ...) (dus, alle schijven zwart) in het beeld van de afbeelding F zit. Daar is wiskunde voor nodig die niet op de middelbare school wordt behandeld; als je het echt graag wilt zien, kun je op de LIMO-website (http://limo.a-eskwadraat.nl) zoeken naar de oplossingen van de LIMO 2007.

Wij kijken naar nog een voorbeeld, namelijk de $2 \times n$ rechthoek:

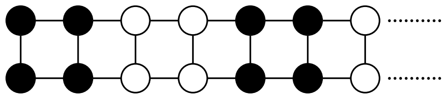


Is n oneven, dan vatten we dit op als vereniging van een L-vormig netwerkje aan de ene kant, vervolgens een aantal T-vormige netwerkjes (beurtelings rechtop of omgedraaid), en aan het andere eind nog een L-vorm (rechtop of ondersteboven, afhankelijk van $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 3$).



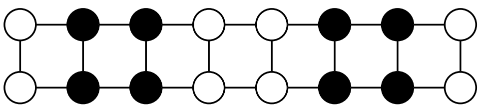
Door in ieder van deze mini-netwerkjes de centrale schijf aan te wijzen flipt het hele netwerk. Dus dit is een oplossing. Je kunt deze oplossing spiegelen (dus als je ergens een schijf in de onderste rij had aangewezen, dan wijs je nu op die plek de schijf in de bovenste rij aan, en omgekeerd), en dat is een andere oplossing. In termen van het voorschrift F bij dit voorbeeld, betekent dit dat er verschillende rijtjes $r \neq s$ zijn met $F(r) = (1, 1, 1, 1, ...) = F(s)$. Dus er zitten minder rijtjes in het beeld van F dan er 'aanwijsrijtjes' zijn. Niet elke combinatie van zwarte en witte schijven is dus in dit geval te bereiken. (Ken je een voorbeeld van zo'n onbereikbare combinatie?)

Bovenstaande strategie levert alleen voor oneven n een oplossing voor het $2 \times n$ bord. Een andere strategie is om steeds in een 2×2 vierkant alle schijven aan te wijzen, dan in het ernaastgelegen 2×2 vierkant geen enkele schijf aanwijzen, daarnaast weer 2×2 wel, enzovoort.



Een schijf die hier aangewezen wordt, flipt in totaal drie keer van kleur (namelijk als hij zelf aangewezen wordt, en als z'n beneden- of bovenbuur aan de beurt is, en als z'n linker- of rechterbuur aan de beurt is). Heb je een schijf die niet zelf aangewezen wordt en die bovendien niet helemaal links of helemaal rechts zit, dan heeft deze precies één buur die wel wordt aangewezen. Dus ook deze schijf flipt naar zwart. Maar als er helemaal links een 2×2 vierkant met niet aangewezen schijven staat, dan blijven de twee linkse schijven daarvan wit. En hetzelfde geldt voor een 2×2 vierkant niet aangewezen schijven aan de rechterkant: de twee meest rechtse schijven ervan zouden wit blijven.

We zien dus dat deze strategie werkt, behalve als er helemaal links of helemaal rechts een 2×2 vierkant met niet aangewezen schijven overblijft. Je kunt nu de mogelijkheden voor n langslopen: voor $n = 4k$ wijs je de twee schijven helemaal links (en ook helemaal rechts) niet aan, daarnaast 2×2 wel, daarnaast niet, enzovoort.



Voor $n = 4k + 2$ begin je meteen links met een 2×2 vierkant dat je aanwijst. Daarnaast een vierkant niet, dan weer wel, enzovoort. Je eindigt dan helemaal rechts met een vierkant dat wordt aangewezen. Ook voor $n = 4k + 3$ begin je meteen links met een 2×2 vierkant dat je aanwijst, daarnaast een vierkant niet, enzovoort. Aan het eind blijven dan precies twee schijven over die je niet aanwijst.

De strategie werkt niet als $n = 4k + 1$. Maar dat is niet erg, want zulke n zijn oneven getallen. En daarvoor hadden we al een andere strategie! Voor alle even n werkt het wel, en dus hebben we nu voor elke n een oplossing bij het $2 \times n$ bord.

Misschien lukt het ook wel om manieren te bedenken die voor een $3 \times n$ bord altijd een oplossing geven. Wij hebben dit niet geprobeerd. Als iemand een oplossing kent, dan horen we dit graag! ■